

УДК 532.59

С.Г. Демышев, О.А. Дымова, Л.В. Черкесов

Численное моделирование течений в бассейне переменной глубины с двумя проливами

В рамках линейной теории длинных волн с учетом турбулентной вязкости исследуется развитие приливных течений в бассейне переменной глубины с двумя проливами. Задача решается численно. Поле скоростей на границе пролив – бассейн предполагается известным. Расчеты проводятся для различных глубин проливов. Изучается влияние геометрических характеристик бассейна на величину амплитуд профиля свободной поверхности и волновой скорости. Установлены зависимости волновых характеристик от периода скорости течений в проливе и параметров бассейна. В частности, показано, что увеличение периода скорости течений в проливе приводит к значительным изменениям уровня и структуры течений

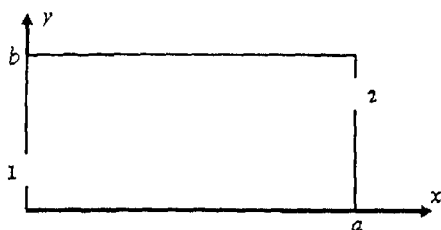
Введение. На гидрологические характеристики Черного моря значительное влияние оказывает водообмен через пролив Босфор. Поступление более соленой и насыщенной кислородом воды из Мраморного моря способствует стабильности экосистемы Черного моря.

Численное моделирование течений на основе гидродинамических моделей является мощным инструментом исследований. В работе [1] представлена боксовая модель динамики так называемой турецкой проливной системы (пролив Дарданеллы, Мраморное море, пролив Босфор). На ее основе описаны самые общие черты циркуляции Мраморного моря в его верхнем слое. В статье [2] в рамках полной численной нелинейной модели рассматривается формирование трехмерной гидродинамической структуры вод Мраморного моря с учетом проливов. В отличие от приведенных работ однослойная модель позволяет выделить и изучить отдельные физические механизмы, формирующие особенности динамики вод. Такое исследование было начато в [3], где рассматривалось развитие приливных течений в бассейне постоянной глубины с учетом действия диссипативных сил.

В данной работе на основе линейной численной модели изучается влияние геометрических характеристик бассейна переменной глубины и параметров внешних потоков через проливы на структуру течений. Выбранные пространственные масштабы бассейна, наличие в нем двух проливов соответствуют геометрическим характеристикам Мраморного моря.

Постановка. Рассмотрим прямоугольный бассейн с размерами $a \times b$ переменной глубины с двумя проливами (рис. 1). Глубина бассейна изменяется по закону:

$$h(x, y) = h_1 + h_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (1)$$



Р и с. 1. Схема бассейна

Здесь h_1 – глубина проливов, $(h_0 + h_1)$ – максимальная глубина бассейна.

Уравнения, описывающие движение жидкости с учетом горизонтальной турбулентной вязкости, в линейном приближении имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - A_L \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= 0, & \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - A_L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где t – время, u и v – составляющие скорости по осям x и y соответственно, ζ – возвышение свободной поверхности, g – ускорение силы тяжести, A_L – горизонтальный коэффициент турбулентной вязкости.

Ставятся следующие краевые условия:

в проливах

$$u_1 = u(0, y, t) = u_{01} \cos^2 \left(\frac{\pi(y - b_1)}{2l_1} \right) \sin \sigma t, \quad v_1 = v(0, y, t) = 0, \quad b_1 - l_1 < y < b_1 + l_1, \quad (3)$$

$$u_2 = u(a, y, t) = u_{02} \cos^2 \left(\frac{\pi(y - b_2)}{2l_2} \right) \sin \sigma t, \quad v_2 = v(a, y, t) = 0, \quad b_2 - l_2 < y < b_2 + l_2;$$

на твердых стенках

$$\begin{aligned} u = \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \begin{cases} 0 \leq y \leq b_1 - l_1, & b_1 + l_1 \leq y \leq b, & x = 0, \\ 0 \leq y \leq b_2 - l_2, & b_2 + l_2 \leq y \leq b, & x = a, \end{cases} \\ v = \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad y = 0, \quad y = b. \end{aligned} \quad (4)$$

Индексы 1, 2 соответствуют номеру пролива, $u_{01,02}$ – максимальное значение скорости в проливе, $b_{1,2}$ – y -координата центра пролива, $2l_{1,2}$ – ширина пролива, σ – частота.

В начальный момент времени возмущения свободной поверхности отсутствуют и скорость равна нулю:

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0. \quad (5)$$

Выбор краевых условий (4) (непротекание для нормальной составляющей и скольжение для касательной скорости) обусловлен необходимостью уменьшить влияние турбулентной вязкости. Известно, что вязкий пограничный слой, который образуется при задании условий прилипания, имеет небольшие горизонтальные масштабы [5] и поэтому при численном решении задачи требует высокого пространственного разрешения. Выбор условий (4) фактически заменяет вязкий погранслои на инерционный, который может быть разрешен в численной модели. Кроме того, в реальности в океанах и морях твердые отвесные берега, как правило, отсутствуют. И, следовательно, при учете в модели вертикальных твердых границ требуется уменьшить трение о боковую стенку. Поэтому условия (4) часто используются при проведении расчетов с учетом турбулентной вязкости [6 – 8].

Численная модель. Дифференциальная система уравнений (2) аппроксимируется неявной конечно-разностной схемой второго порядка точности по времени и пространству на сетке C (в терминологии работы [9]). При этом дискретный аналог системы (2) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\zeta_{ij}^{n+1} - \zeta_{ij}^n}{\Delta t} = - \frac{[u_{i+1,j}^{n+1}(h_{i+1,j} + h_{i,j}) - u_{ij}^{n+1}(h_{i,j} + h_{i-1,j})]}{2 \Delta x} - \frac{[v_{i,j+1}^{n+1}(h_{i,j+1} + h_{i,j}) - v_{i,j}^{n+1}(h_{i,j} + h_{i,j-1})]}{2 \Delta y}, \quad (6)$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n-1}}{2 \Delta t} = - \frac{g}{\Delta x} (\zeta_{ij}^{n+1} - \zeta_{i-1,j}^{n+1}) + A_L \left(\frac{u_{i+1,j}^{n-1} - u_{ij}^{n-1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{ij}^{n-1} - u_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2} \right) + A_L \left(\frac{u_{i,j+1}^{n-1} - u_{i,j}^{n-1}}{\Delta y^2} - \frac{u_{i,j}^{n-1} - u_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta y^2} \right), \quad (7)$$

$$\frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^{n-1}}{2 \Delta t} = - \frac{g}{\Delta y} (\zeta_{ij}^{n+1} - \zeta_{i,j-1}^{n+1}) + A_L \left(\frac{v_{i+1,j}^{n-1} - v_{ij}^{n-1}}{\Delta x^2} - \frac{v_{ij}^{n-1} - v_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2} \right) + A_L \left(\frac{v_{i,j+1}^{n-1} - v_{i,j}^{n-1}}{\Delta y^2} - \frac{v_{i,j}^{n-1} - v_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta y^2} \right), \quad (8)$$

где индекс n показывает временной уровень, Δt – шаг по времени, Δx , Δy – шаги по пространству.

При аппроксимации по времени использовалась известная схема «чехарды» с периодическим подключением схемы Матсуно [9].

Преобразуем систему уравнений (6) – (8). Для этого выразим $u_{i,j}^{n+1}$, $v_{i,j}^{n+1}$ через правые части уравнений (7) и (8) соответственно и полученные выражения подставим в (6). В результате уравнение для ζ_{ij}^{n+1} имеет вид

$$\zeta_{ij}^{n+1} = \frac{1}{B} \left\{ \zeta_{ij}^n + \frac{\Delta t^2 g}{\Delta x^2} [\zeta_{i+1,j}^{n+1} (h_{i+1,j} + h_{i,j}) + \zeta_{i-1,j}^{n+1} (h_{i-1,j} + h_{i,j})] + \right. \\ \left. + \frac{\Delta t^2 g}{\Delta y^2} [\zeta_{i,j+1}^{n+1} (h_{i,j+1} + h_{i,j}) + \zeta_{i,j-1}^{n+1} (h_{i,j-1} + h_{i,j})] - \right. \\ \left. - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{i+1,j} + h_{i,j}) (u_{i+1,j}^{n-1} + 2\Delta t DU_{i+1,j}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{i-1,j} + h_{i,j}) (u_{i,j}^{n-1} + 2\Delta t DU_{i,j}) - \right. \\ \left. - \frac{\Delta t}{2\Delta y} (h_{i,j+1} + h_{i,j}) (v_{i,j+1}^{n-1} + 2\Delta t DV_{i,j+1}) + \frac{\Delta t}{2\Delta y} (h_{i,j-1} + h_{i,j}) (v_{i,j}^{n-1} + 2\Delta t DV_{i,j}) \right\}. \quad (9)$$

Здесь

$$B = 1 + \frac{\Delta t^2 g}{\Delta x^2} (h_{i+1,j} + 2h_{i,j} + h_{i-1,j}) + \frac{\Delta t^2 g}{\Delta y^2} (h_{i,j+1} + 2h_{i,j} + h_{i,j-1}), \\ DU_{i,j} = A_L \left(\frac{u_{i+1,j}^{n-1} - u_{i,j}^{n-1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i,j}^{n-1} - u_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n-1} - u_{i,j}^{n-1}}{\Delta y^2} - \frac{u_{i,j}^{n-1} - u_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta y^2} \right), \\ DV_{i,j} = A_L \left(\frac{v_{i+1,j}^{n-1} - v_{i,j}^{n-1}}{\Delta x^2} - \frac{v_{i,j}^{n-1} - v_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^{n-1} - v_{i,j}^{n-1}}{\Delta y^2} - \frac{v_{i,j}^{n-1} - v_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta y^2} \right).$$

Уравнение (9) решалось методом верхней блочной релаксации [10].

Схема расчета полей u , v , ζ следующая. По известным полям $u_{i,j}^{n-1}$, $v_{i,j}^{n-1}$ с учетом разностных аналогов краевых и начальных условий (3), (4) рассчитывалась правая часть уравнения (9). Решением этого уравнения являлась функция $\zeta_{i,j}^{n+1}$, которая вместе с $u_{i,j}^{n-1}$, подставлялась в правые части уравнений (7) и (8), и затем находились $u_{i,j}^{n+1}$, $v_{i,j}^{n+1}$. На следующем шаге по времени вся процедура расчета повторялась [11].

Эксперимент. Область интегрирования разбивалась на ячейки с горизонтальными размерами $\Delta x = 2$ км, $\Delta y = 1$ км. Применение неявной схемы позволило выбрать относительно большой шаг по времени ($\Delta t = 10$ мин), что значительно сократило время проведения численного эксперимента по сравнению с явными схемами, используемыми в [3]. Расчеты проводились для различных глубин проливов, и изучалось влияние геометрических характеристик бассейна на амплитуду возвышения свободной поверхности и амплитуду волновой скорости установившихся колебаний. Величина волновой скорости $V(x, y, t)$ вычислялась по формуле $V = \sqrt{u^2 + v^2}$. Рассматривались волны с периодами 12 и 24 ч, величина A_L принималась равной $0,1 \text{ м}^2/\text{с}$. Были выбраны следующие параметры бассейна: $a = 200$ км, $b = 100$ км, максимальная глубина $(h_1 + h_0) = 200$ м. Характеристики проливов приведены в табл. 1. Глубину проливов варьировали от 5 до 50 м, и рассчитывались максимальные

значения волновых характеристик после установления колебаний. Высота стенки принималась равной глубине пролива. Эксперимент показал, что колебания устанавливались при $t \geq 5\tau$, τ – период волны. Результаты численных расчетов приведены в табл. 2 и 3.

Т а б л и ц а 1

Параметры проливов

Номер пролива	Координаты центра пролива (x, y), км	Ширина пролива, км	Значение u_0 , м/с
1	(0, 20)	1,5	1
2	(200, 80)	3	0,5

В табл. 2 представлены результаты расчетов для волны с периодом 12 ч. Максимальные и минимальные значения уровня наблюдаются в проливах. Видно, что с увеличением глубины пролива растет амплитуда возвышения свободной поверхности и значение скорости. При увеличении h_1 в 10 раз значение $\zeta_{\max}$ увеличивается на 26%, $|\zeta_{\min}|$ – на 25%, а скорости – на 10%. Также наблюдается изменение количества узловых линий.

Т а б л и ц а 2

Зависимость величины волновых характеристик от глубины пролива для волны с периодом 12 ч

h_1 , м	$\zeta_{\max}$, мм	$\zeta_{\min}$, мм	$V_{\max}$, см/с	Количество узловых линий
5	11	-8	19	4
10	13	-9	20	3
20	14	-9	20	4
50	15	-10	21	3

Т а б л и ц а 3

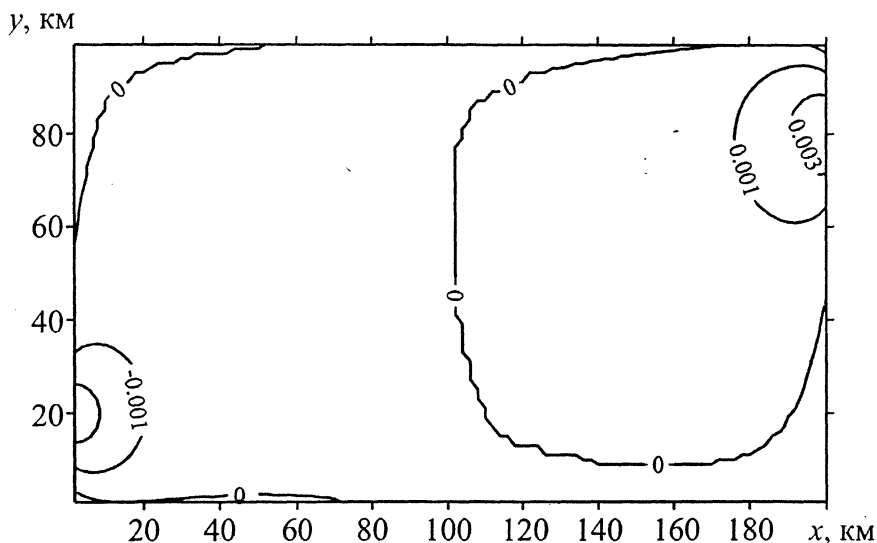
Зависимость величины волновых характеристик от глубины пролива для волны с периодом 24 ч

h_1 , м	$\zeta_{\max}$, мм	$\zeta_{\min}$, мм	$V_{\max}$, см/с	Количество узловых линий
5	6	-4,5	19	3
10	7	-5	20	2
20	8	-5,5	21	2
50	8,5	-5,5	21	4

В табл. 3 сведены данные, полученные для $\tau = 24$ ч. Отсюда видно, что с увеличением глубины проливов, исследуемые величины также растут. Значение $\zeta_{\max}$ увеличивается на 41%, $|\zeta_{\min}|$ – на 22%, а скорости – на 10%. Количество узловых линий в установившемся режиме меняется от 3 до 4. Сравнивая данные, представленные в табл. 2 и 3, отметим, что при увеличении периода внешнего воздействия уменьшаются максимальные отклонения свободной поверхности, а скорости остаются неизменными. Так, при увеличении τ в 2 раза $\zeta_{\max}$ уменьшается в 1,7 раза, $|\zeta_{\min}|$ – в 1,8 раза.

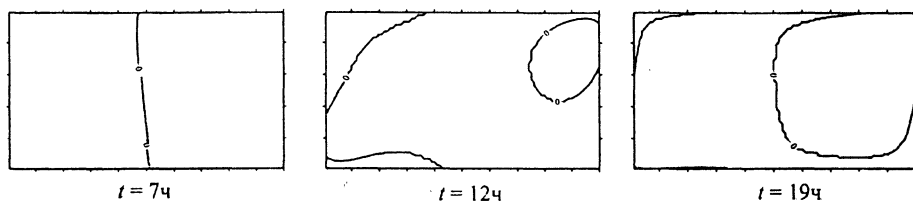
По данным расчетов были построены карты поверхностей уровня и полей волновых скоростей в случае установившихся колебаний для периодов 12 и 24 ч.

На рис. 2 изображена поверхность уровня $\zeta(x, y, t_1)$ для $\tau = 12$ ч. Здесь $t_1 = 103$ ч, время выбрано так, чтобы поднятие уровня было максимальным за период. На поверхности имеется три узловых линии. Эксперимент показал, что при приближении к проливам поднятие уровня возрастает. Наибольшего значения амплитуда возвышения свободной поверхности достигает в проливах и равна 14 мм.



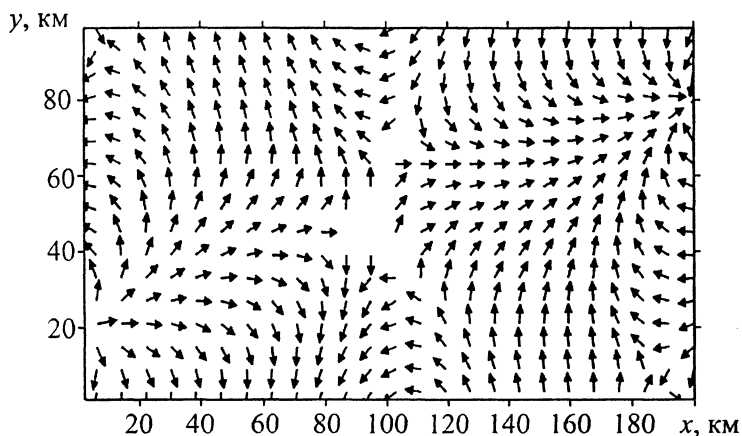
Р и с. 2. Уровневая поверхность для волны с $\tau = 12$ ч (цифры на кривых – значения изолиний уровня, м)

Была также исследована деформация узловых линий с течением времени до установления колебаний. На рис. 3 видно, что с течением времени меняется как количество, так и положение узловых линий. Численный эксперимент показал, что после установления колебаний ($t > 60$ ч) количество и положение узловых линий повторяется через период.



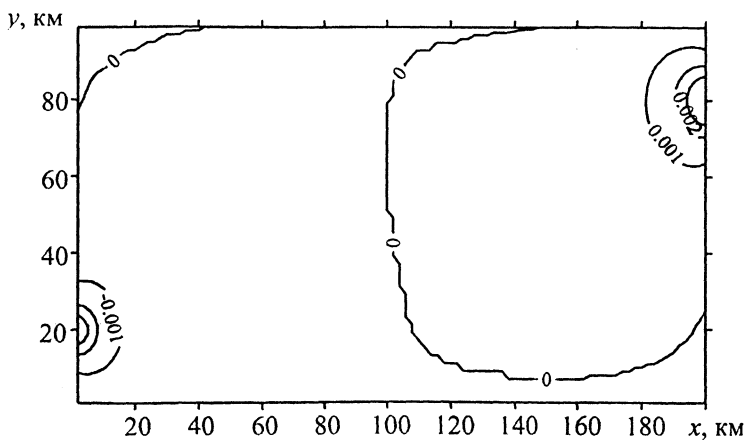
Р и с. 3. Деформация узловых линий для волны с $\tau = 12$ ч

На рис. 4 изображено поле скоростей $\mathbf{V}$ в момент времени $t_1 = 75$ ч. Размер и направление стрелки соответствуют модулю и направлению вектора $\mathbf{V}$. Максимальный размер стрелки отвечает значению скорости 20 см/с. Из рис. 4 видно, что величина вектора волновой скорости распределена неравномерно для колебаний $\tau = 12$ ч. Максимальные значения скорости имеют место в проливах, а в окрестностях центра бассейна скорости не превышают 1 мм/с. Эксперимент показал, что амплитуда возвышения свободной поверхности и волновая скорость достигают максимальных по модулю значений каждые 6 ч.

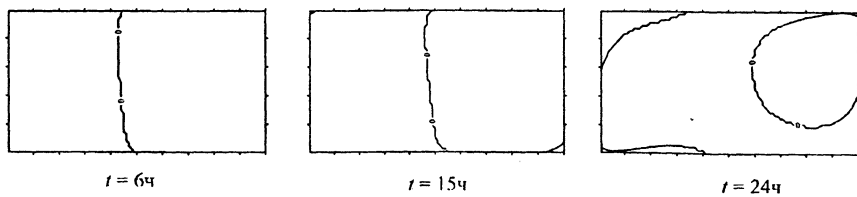


Р и с. 4. Поле скоростей для волны с $\tau = 12$ ч

Перейдем к случаю, когда период внешнего воздействия равен 24 ч. На рис. 5 изображена поверхность уровня $\zeta(x, y, t_1)$ для $\tau = 24$ ч, $t_1 = 253$ ч. На поверхности имеется две узловых линии, показаны также несколько изолиний уровня. Амплитуда возвышения свободной поверхности возрастает при приближении к проливам и достигает 8 мм. Так же как и в предыдущем случае, рассмотрена деформация узловых линий с течением времени от начала движения (рис. 6). Для волны с периодом 24 ч в различные моменты времени количество узловых линий изменяется от одной до трех, положение их также различно. После установления колебаний $t > 120$ ч положение узловых линий повторяется через период.

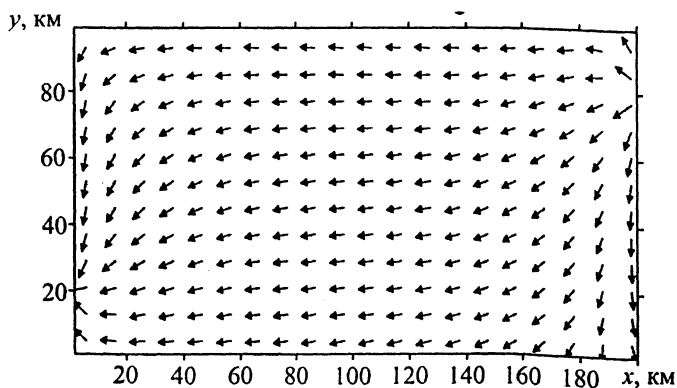


Р и с. 5. Уровневая поверхность для волны с $\tau = 24$ ч (цифры на кривых – значения изолиний уровня, м)



Р и с. 6. Деформация узловых линий для волны с $\tau = 24$ ч

На рис. 7 представлено поле скорости $\mathbf{V}$ в момент времени $t_1 = 138$ ч. Размер и направление стрелки соответствуют модулю и направлению вектора $\mathbf{V}$. Максимальный размер стрелки отвечает значению скорости 21 см/с. Максимальные значения скорости наблюдаются в проливах, а в центральной части бассейна скорости распределены равномерно. Численный эксперимент показал, что амплитуда возвышения свободной поверхности и волновая скорость достигают максимальных по модулю значений каждые 12 ч.



Р и с. 7. Поле скоростей для волны с $\tau = 24$ ч

Сравнивая результаты, полученные для периодов 12 и 24 ч, можно отметить, что увеличение периода внешнего воздействия приводит к значительным изменениям вида волновой поверхности и структуры течения. Так, в установившемся режиме значение $\zeta_{\max}$ уменьшается в 1,75 раза при увеличении периода в 2 раза. На свободной поверхности имеется три узловых линии при $\tau = 12$ ч и две – при $\tau = 24$ ч. Структура течений в рассмотренных вариантах также различна, хотя численные значения скорости отличаются незначительно (порядка 5 %). При $\tau = 12$ ч наблюдается уменьшение величины волновой скорости от проливов к центру, а в случае $\tau = 24$ ч значения скорости в центральной части бассейна ($50 \leq x \leq 150$ км) примерно одинаковы и направление вектора $\mathbf{V}$ совпадает с направлением скорости в проливе.

Заключение. Анализ результатов проведенных экспериментов позволил сделать следующие выводы:

- увеличение глубины проливов приводит к увеличению отклонения возвышения свободной поверхности от невозмущенного уровня;
- максимальные значения волновой скорости при увеличении глубины проливов возрастают;
- увеличение периода скорости течений в проливе приводит к значительным изменениям вида волновой поверхности и структуры течения;
- с ростом периода скорости течений в проливе уменьшается отклонение возвышения свободной поверхности от невозмущенного уровня, также изменяется количество узловых линий;
- структура течений при разных периодах также различна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Besiktepe S.T., Sur H.I., Özsoy E. et al.* The circulation and hydrography of the Marmara Sea // *Prog. Oceanogr.* – 1994. – 34. – P. 285 – 334.
2. *Демышев С.Г., Довгая С.В.* Численный эксперимент по моделированию гидрофизических полей Мраморного моря с учетом проливов Босфор и Дарданеллы // *Морской гидрофизический журнал.* – 2007. – № 3. – С. 28 – 41.
3. *Демышев С.Г., Дымова О.А., Маркова Н.В.* Численное моделирование приливных волн и течений в бассейне с двумя проливами // Там же. – 2006. – № 2. – С. 66 – 76.
4. *Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартиев С.М.* Введение в гидродинамику и теорию волн. – С-Пб.: Гидрометеиздат, 1992. – 264 с.
5. *Каменкович В.М.* Основы динамики океана. – Л.: Гидрометеиздат, 1973. – 240 с.
6. *Holland W.R., Lin L.B.* On the generation of mesoscale eddies and their contribution to the oceanic general circulation // *J. Phys. Oceanogr.* – 1975. – 5. – P. 642 – 669.
7. *Wang J.* A nowcast/forecast system for coastal ocean circulation using simple nudging data assimilation // *J. Atm. Oceanic Technology.* – 2001. – 3. – P. 1037 – 1047.
8. *Дорофеев В.Л., Коротаев Г.К.* Валидация результатов моделирования циркуляции Черного моря на основе данных всплывающих буев // *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа / Дистанционное зондирование морских систем.* – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2004. – Вып. 11. – С. 63 – 74.

9. *Arakawa A., Lamb V.R.* A potential enstrophy and energy conserving scheme for the shallow water equation // *Mon. Wea. Rev.* – 1981. – 109, №1. – P. 18 – 36.
10. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
11. *Яковлев Н.Г.* Численная модель и предварительные результаты расчетов по воспроизведению летней циркуляции вод Карского моря // *Изв. РАН. ФАО.* – 1996. – 32, № 5. – С. 714 – 723.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь

Материал поступил
в редакцию 16.01.06
После доработки 09.02.06

ABSTRACT Development of tidal flows in a basin of variable depth with two straits is studied within the framework of the linear theory of long waves with regard to turbulent viscosity. The problem is solved using the numerical model. The field of velocities on the strait-basin boundary is assumed to be known. Calculations are done for different depths of the straits. Influence of the basin geometrical characteristics on the free surface profile and the wave velocity is studied. Dependencies of wave characteristics upon the period of flow velocity in the strait and the basin parameters are obtained. It is shown, in particular, that increase of the period of flow velocities in the straits results in considerable changes of the flow levels and structure.